Chapitre 19

Applications linéaires : généralités

I L'espace $\mathcal{L}(E, F)$

1) Définitions et exemples

Définition 1

Soit E et F deux espaces vectoriels. On dit qu'une application $f : E \to F$ est une application linéaire si et seulement si elle vérifie :

(i) Pour tous $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vecteurs de E, $f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$.

(ii) Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, $\forall \vec{u} \in E$, $f(\alpha\vec{u}) = \alpha f(\vec{u})$

ou, de manière équivalente, si et seulement si

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}^2, f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Exemples :

- Soit $f : \begin{array}{ll} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto (x + y, x - 2y) \end{array}$
  Montrons que f est linéaire.

- Soit $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $f(P) = P'$ (où P' est la dérivée de P). Alors f est linéaire :

- Si E est un espace vectoriel, on note Id_E l'application identité de E, définie par

$$\text{pour tout } u \in E,\ Id_E(u) = u$$

De manière immédiate, Id_E est une application linéaire.

▶ Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. On pose

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2,1} & \to & \mathcal{M}_{2,1} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

Alors f est linéaire :

Propriété 1

Si f est linéaire, alors $f(0_E) = 0_F$

▷ *Preuve :* si f est linéaire, on doit avoir en particulier $f(\underbrace{2 \times 0_E}_{=0_E}) = 2f(0_E)$.

Donc : $f(0_E) = 2f(0_E)$, donc $f(0_E) - f(0_E) = 2f(0_E) - f(0_E)$,c'est à dire $0_F = f(0_E)$.

◁

Pour montrer qu'une application n'est pas linéaire, il suffira parfois de regarder $f(\vec{0})$...

A noter : *Vocabulaire spécifique*

Les applications linéaires sont également appelées "morphismes" d'espace vectoriel. Le terme "morphisme" est relatif à la "forme" des espaces vectoriels : une application linéaire est en effet une application compatible avec les combinaisons linéaires...

Dans le cas où $f : E \to E$, on parle d'**endomorphisme** de E ("morphisme interne"), et on note simplement $f \in \mathcal{L}(E)$.

Dans le cas où $f : E \to F$ est bijective, on parle d'**isomorphisme** (même forme) de E sur F, et l'on note $f \in GL(E, F)$ (GL signifie "Groupe Linéaire").

Dans le cas où f est un endomorphisme bijectif, on parle d'**automorphisme** de E, et l'on note $f \in GL(E)$.

Enfin, si $f : E \to F$ avec $F = \mathbb{K}$ (c'est à dire que l'image d'un vecteur par f est un scalaire), on parle de **forme linéaire**.

Encore des exemples :

▶ Soit $\vec{u} \neq (0,0)$ et $t_{\vec{u}} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x,y) + \vec{u} \end{array} \right.$.

On dit que $t_{\vec{u}}$ est la translation de vecteur $\vec{u}$.

Ce n'est pas linéaire, car $t_{\vec{u}}((0,0)) = \vec{u} \neq (0,0)$: cela contredit la première propriété...

- Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = ax$.
  Alors f est une application linéaire.
  En effet :

  C'est un endomorphisme car l'espace de départ est le même que celui d'arrivée.

  De plus, si $a \neq 0$, f est bijectif (de bijection réciproque $f^{-1} : x \mapsto \frac{1}{a}x$)). C'est alors un automorphisme de $\mathbb{R}$.

- Soit $p : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x,0) \end{array} \right.$. Cette application est appelée projection sur l'axe des abscisses.
  On montre qu'elle est linéaire :

  Comme l'ensemble de départ est celui d'arrivée, f est un endomorphisme.

2) Opérations dans $\mathcal{L}(E,F)$

a) Combinaisons linéaires

Proposition 1

Soient f et g appartenant à $\mathcal{L}(E,F)$, soient λ et μ deux scalaires. On définit l'application $\lambda f + \mu g$ par,

$$\forall \vec{u} \in E, (\lambda f + \mu g)(\vec{u}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu g(\vec{u})$$

Alors $\lambda f + \mu g \in \mathcal{L}(E,F)$
Autrement dit : toute combinaison linéaire d'applications linéaires est une application linéaire.

▷ *Preuve* : Soit $h = \lambda f + \mu g$ et montrons que h est linéaire.
Prenons $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de E et α et β deux scalaires.
On veut montrer que $h(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha h(\vec{u}) + \beta h(\vec{v})$

Comme $h(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \lambda f(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) + \mu g(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v})$ et que f et g sont linéaires, on a donc :
$h(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}) = \lambda(\alpha f(\vec{u})+\beta f(\vec{v}))+\mu(\alpha g(\vec{u})+\beta g(\vec{v})) = \alpha(\underbrace{\lambda f(\vec{u}) + \mu g(\vec{u})}_{=h(\vec{u})}) + \beta(\underbrace{\lambda f(\vec{v}) + \mu g(\vec{v})}_{=h(\vec{v})})$
donc h est linéaire.

◁

A noter : *C'est encore un espace vectoriel !*

D'après la définition donnée dans la proposition, on a directement les propriétés suivantes :
Pour tout $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

1. $(\lambda+\mu)f = \lambda f + \mu f$,
2. $\lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g$
3. $\lambda(\mu f) = (\lambda\mu)f$.

De plus, soit l'application

$$O_{\mathcal{L}(E,F)} : \left\{ \begin{array}{ll} E & \to F \\ \vec{u} & \mapsto O_F \end{array} \right.$$

Elle est telle que $f + O_{\mathcal{L}(E,F)} = f$ et elle est donc neutre pour $+$.

Ainsi, $\mathcal{L}(E,F)$ est lui même un espace vectoriel, et ce qui joue le rôle de "vecteur nul" est l'application $O_{\mathcal{L}(E,F)}$ ci dessus...

b) Composition

Proposition 2

Soit E, F et G trois espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$.
Autrement dit : la composition de deux applications linéaires est linéaire.

▷ *Preuve :*

◁

Définition 2 (*Puissance d'endomorphisme*)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme.
Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose f^p l'endomorphisme défini :
— $f^0 = id_E$
— *si $p > 0$, $f^p = f \circ f^{p-1}$*

Autrement dit, $f^p = \underbrace{f \circ f \ldots \circ f}_{p fois}$.
Par exemple, la composée $f \circ f$ peut être notée f^2.

Danger ! *vraie puissance ?*

Il ne s'agit pas d'une puissance au sens du produit !
Bien qu'il n'y ait en réalité pas d'ambigüité possible avec le produit (car les éléments traités sont vectoriels et qu'on n'a pas de produit de vecteurs qui donnent des vecteurs), il faudra être prudent : il s'agit bien de la composée.

c) Isomorphisme et bijection réciproque

Proposition 3

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ un isomorphisme (c'est à dire une application linéaire bijective). Alors f^{-1} (la bijection réciproque) est linéaire de F dans E (ie. $f^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$).

▷ *Preuve :*

◁

II Noyau et image d'une application linéaire

1) Noyau

a) Définition

Définition 3

On appelle noyau d'une application linéaire $f : E \to F$, noté $\operatorname{Ker} f$ *l'ensemble*

$$\operatorname{Ker} f = \{u \in E ; f(u) = 0_F\}$$

Le noyau est donc l'ensemble des vecteurs dont l'image par f est le vecteur nul.

Propriété 2

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. $\operatorname{Ker} f$ est un s.e.v. de E.

▷ *Preuve :*

◁

Méthode : *Chercher le noyau d'une application linéaire*

On suit la définition et on résout l'équation vectorielle d'inconnue $u \in E$:

$$f(u) = 0_F$$

Dans de très nombreux cas, cela va nous fournir un système d'équations...

Exemple

Soit f définie par $f(x, y, z) = (2x + y + 3z, 2y + 2z, x + y + 2z)$. Déterminons $\operatorname{Ker} f$:

b) Lien avec l'injectivité

Rappel :

Soit $f : E \to F$ une application.

On dit que f est injective si et seulement si et seulement si $f(x) = f(y)$ implique que $x = y$.

Cela signifie en fait que tout élément de F admet au plus un antécédent par f : deux éléments de E ne peuvent avoir même image.

Proposition 4

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{O_E\}$$

▷ *Preuve :*

◁

2) Image d'une application linéaire

a) Définition

Définition 4

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On définit l'image de f, notée $\operatorname{Im} f$ *par*

$$\operatorname{Im} f = f(E) = \{f(u); u \in E\} = \{y \in F; \exists u \in E \text{ tel que } f(u) = y\}$$

Exemple
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $f(x,y,z) = (2x+y+3z, 2y+2z, x+y+2z)$.

$$\begin{aligned} u \in \operatorname{Im} f &\Leftrightarrow \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3; u = (2x+y+3z, 2y+2z, x+y+2z) \\ &\Leftrightarrow \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3; u = x(2,0,1) + y(1,2,1) + z(3,2,2) \\ &\Leftrightarrow u \in Vect((2,0,1),(1,2,1),(3,2,2)) \end{aligned}$$

Ainsi $\operatorname{Im} f = Vect((2,0,1),(1,2,1),(3,2,2))$.

Proposition 5

Soit f une application linéaire de E dans F , alors $\operatorname{Im} f$ *est un sous espace vectoriel de F.*

▷ *Preuve :*

◁

b) Lien avec la surjectivité :

Rappel :
Soit $f : E \to F$ une application.
On dit que f est surjective si et seulement si tout élément de F admet au moins un antécédent, i.e. si et seulement si pour tout $y \in F$, $\exists x \in E; f(x) = y$.

Proposition 6

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors :

$$f \text{ est surjective} \Leftrightarrow \operatorname{Im} f = F.$$

▷ *Preuve :* C'est la définition ! $\operatorname{Im} f = F$ signifie exactement que tout vecteur de F s'écrit comme image par f d'un vecteur de u.... c'est cela que veux dire "surjectif"... ◁

3) Un exemple fondamental d'isomorphisme

Soit E un espace vectoriel de dimension n, et soit $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ une base de E.
On considère maintenant l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, muni de sa base canonique $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

C'est à dire $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, …, $e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Soit φ l'application définie sur E par $\varphi(u) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ où $x_1, \ldots, \ldots, x_n$ sont les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$.

(Par exemple, si $E = \mathbb{R}_2[X]$, $\varphi(3x^2 + 2x - 1) =$)

Etudions $\operatorname{Ker} \varphi$:

Etudions $\operatorname{Im} \varphi$:

Ainsi, φ est un isomorphisme, et on vient de montrer ce résultat fondamental :

Proposition 7

Un espace vectoriel est de dimension n si et seulement si il est isomorphe à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

III Projecteurs

1) Définitions

Rappel
Soit E un espace vectoriel. On dit que deux sous espaces vectoriels F_1 et F_2 sont supplémentaires si et seulement si $E = F_1 \oplus F_2$.
Cela signifie que, pour tout vecteur $u \in E$, il existe un unique couple $(u_1, u_2) \in F_1 \times F_2$ tels que

$$u = u_1 + u_2$$

Définition 5

Soient F_1 et F_2 deux sous espaces vectoriels supplémentaires d'un espace vectoriel E.

On appelle projecteur de E sur F_1 parallèlement à F_2 l'application p définie pour tout vecteur $u = u_1 + u_2$ de E (avec $u_1 \in F_1$ et $u_2 \in F_2$) par $p(u) = u_1$.

De même, on appelle projecteur de E sur F_2 parallèlement à F_1 l'application q définie pour tout vecteur $u = u_1 + u_2$ de E par $q(u) = u_2$.

Les projecteurs p et q sont appelés projecteurs associés aux espaces supplémentaires E_1 et E_2.

Remarque
Si p est un projecteur de F_1 parallèlement à F_2, on dit aussi que F_2 est la direction de la projection.

2) Propriétés

Propriété 3

Si p est un projecteur, alors p est un endomorphisme de E.

▷ *Preuve :*

◁

Propriété 4

Soit p un projecteur de E sur F_1 parallèlement à F_2.
Alors $\text{Ker}(p) = F_2$ *et* $Im(p) = F_1$.

De plus, $Im(p) = \text{Ker}(p - Id_E) = \{u \in E; p(u) = u\}$

▷ *Preuve :*

◁

3) Caractérisation des projecteurs

Théorème 1

Soit f un endomorphisme de E.
Alors f est un projecteur si et seulement si $f \circ f = f$.

▷ *Preuve :*

◁

Méthode : *Détermination des caractéristiques d'un projecteur*

Après avoir montré que $f \circ f = f$, il suffit de déterminer $\text{Ker}\, f$ pour obtenir F_2, c'est à dire la direction de la projection.
Pour trouver F_1, on peut chercher $Im(f)$, mais il peut être plus efficace de chercher $\text{Ker}(f - Id_E)$, c'est à dire l'ensemble des vecteurs u de E vérifiant $f(u) = u$ (une sorte de "vecteur fixe"....)